

No. of Printed Pages : 6

Roll No.....

ED-2759(S)

B.A./B.Sc./B.Sc. B.Ed. (Part-III) Suppl. EXAMINATION, 2021

MATHEMATICS

Paper Second

(Abstract Algebra)

Time : Three hours

Maximum Marks : 50

नोट— प्रत्येक इकाई से कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Attempt any two questions from each Unit. All questions carry equal marks.

इकाई—1

Unit-1

1. (अ) मान लो G एक समूह है तथा G क्रम विनिमेय उपसमूह है। तब सिद्ध कीजिए—

(1) G , G का एक प्रसामान्य उपसमूह है,

(2) $\frac{G}{G}$ आबेली है।

ED-2759

[2]

Let G be a group and G be its commutator subgroup. Then prove that

(1) G , is normal subgroup of G

(2) $\frac{G}{G}$ is Abelian group.

(ब) यदि H एक समूह G का एक p -सिलो उपसमूह है तथा $x \in H$, तब सिद्ध कीजिए xHx^{-1} भी G का p -सिलो उपसमूह है।

If H is a p -Sylow subgroup of group G and $x \in H$, then prove that xHx^{-1} is also a p -Sylow subgroup of G .

(स) यदि G तथा G^1 तुल्यकारी आबेली समूह है, तब किसी पूर्णांक S के लिए सिद्ध कीजिए कि $G(S)$ एवं $G(S^1)$ तुल्यकारी हैं।

If G and G^1 are isomorphic abelian groups. Then prove that for any integer S , $G(S)$ and $G(S^1)$ are isomorphic.

इकाई—2

Unit-2

2. (अ) अवशेष वर्ग मॉड्यूलों 5 के क्षेत्र पर निम्न बहुपदों का महत्तम उभयनिष्ठ (g.c.d) ज्ञात कीजिए—

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x - 2$$

$$g(x) = x^2 - 4$$

और इसे दो एकघाती पदों के रूप में व्यक्त कीजिए।

Find the g.c.d. of the following polynomials under moduls 5.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x - 2 \text{ and}$$

$$g(x) = x^2 - 4$$

[P.T.O.]

[3]

ED-2759

- (ब) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक यूक्लीडीय वलय एक मुख्य गुणजावली वलय होता है।

Prove that every Euclidean ring is principal ideal ring.

- (स) मान लो f एक R -माड्यूल M अंतर्क्षेपी एक R -माड्यूल N का एक R -समाकारिता है। तब सिद्ध कीजिए

$$\frac{M}{\text{Ker}f} \cong I_m f$$

Let f be an R -homomorphism of an R -module M into an R -module N . Then prove that :

$$\frac{M}{\text{Ker}f} \cong I_m f$$

इकाई-3

Unit-3

3. (अ) सिद्ध कीजिए कि संपूर्ण $m \times n$ आव्यूहों, जिनके अवयव वास्तविक संख्यायें हैं, का समुच्चय $M_{mn}(F)$ वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र F पर आव्यूहों के योग अर्थात् सदिश योग और एक अदिश द्वारा एक आव्यूहों का गुणन अर्थात् अदिश गुणन के सापेक्ष एक सदिश समष्टि होता है।

Prove that the set $M_{mn}(F)$ of all $m \times n$ matrixes with their elements as real numbers is a vector space over the field F of real numbers with respect to addition of matrixes as addition of vectors and multiplication of a matrix by scalar as scalar multiplication.

ED-2759

[4]

- (ब) सिद्ध कीजिए किसी परिमिततः जनित सदिश समष्टि $V(F)$ का प्रत्येक रैखिकतः स्वतंत्र उपसमुच्चय V के एक आधार का एक अंश होता है।

Prove that every linear independent subset of a finitely generated vector space $V(F)$ form a part of basis of V .

- (स) दर्शाइये कि समुच्चय $S = \{a, ib, c, id\}, C(R)$ का आधार समुच्चय है। यदि और केवल यदि $ad - bc = 0$.

Show that set $S = \{a, ib, c, id\}$, is a basis set of $C(R)$ if $ad - bc = 0$

इकाई-4

Unit-4

4. (अ) मान लो एक रैखिक रूपांतरण $T : P_1 \rightarrow P_2$ निम्न रूप में परिभाषित है—

$$T\{p(x)\} = x p(x)$$

यदि $B = \{u_1, u_2\}$ तथा $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ क्रमशः P_1 और P_2 के आधार हैं, जहाँ

$$u_1 = 1, u_2 = x, u_1 = 1, u_2 = x, u_3 = x^2$$

तब T का आव्यूह, आधारों B तथा B के सापेक्ष ज्ञात कीजिए।

Let $T : P_1 \rightarrow P_2$ be the Linear transformation defined by $T\{p(x)\} = x p(x)$

[5]

ED-2759

if $B = \{u_1, u_2\}$, $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ be bases of P_1 and P_2 respectively where

$$u_1 = 1, u_2 = x, u_1 = 1, u_2 = x, u_3 = x^2$$

Find the matrix of T with respect to the bases B and B .

- (ब) एक रैखिक रूपांतरण $T:V_3 \rightarrow V_3$ निम्न प्रकार से परिभाषित है—

$$T(e_1) = e_1 + e_2$$

$$T(e_2) = 2e_2 + e_3$$

$$T(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$$

जहाँ $\{e_1, e_2, e_3\}, V_3$ के प्रमाणिक आधार हैं। T के लिये जाति-शून्यता प्रमेय सत्यापित कीजिए।

Verify Rank-Nullity theorem for the linear transformation $T:V_3 \rightarrow V_3$ defined by

$$T(e_1) = e_1 + e_2$$

$$T(e_2) = 2e_2 + e_3$$

$$T(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$$

- (स) निम्न द्विघाती समघात को विहित रूप में व्यक्त कीजिए तथा उसकी जाति, सूचकांक एवं चिन्हिका ज्ञात कीजिए—

$$9x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4yz + 6xz$$

Reduce the following quadratic form into canonical form and find its rank, index and signature :

$$9x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4yz + 6xz$$

ED-2759

[6]

इकाई-5

Unit-5

5. (अ) किसी अंतर गुणन समष्टि $V(F)$ में किन्हीं दो समष्टि सदिशों u, v के लिए सिद्ध कीजिए—

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|$$

In inner product space $V(F)$ for any two vectors u, v , prove that :

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|$$

- (ब) यदि एक आन्तर गुणन समष्टि में $\|u\| = \|v\| = \|w\| = 1$ हों तो सिद्ध कीजिए कि सदिश u, v, w और रैखिकतः परतन्त्र होता है, परन्तु विलोम सदैव सत्य नहीं होता।

If u, v, w is an inner product space $\|u\| = \|v\| = \|w\| = 1$

Then prove that the vectors are Linear Dependent (LD) given an example to show that the converse of this statement is false.

- (स) किसी परिमित विमीय आन्तर गुणन समष्टि के लिए बेसेल असमिका को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Bessel's inequality for the finite dimensional vector space.